□26□ □□□□□□

1□□□□□ $f(x)=2lnx+x^2+x$ □

□1□□□□ $y=f(x)$ □□ $(1, f(1))$ □ □□□□□□□

□2□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)=4$ □□□□ $x_1+x_2 \geqslant 2$ □

□□□□□□□1□ $f(x)=2lnx+x^2+x$ □ $x>0$ □ $f'(x)=\frac{2}{x}+2x+1$ □

$f(1)=1+1=2$ □ $f'(1)=5$ □□□□ $y=f(x)$ □□ $(1, f(1))$ □□□□□□□ $y-2=5(x-1)$ □

□ $5x-y-3=0$ □

□2□□□□□□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $f(1)=2$ □□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)=4$ □

□□□□□ $0<x_1 \leqslant 1 \leqslant x_2$ □

□ $F(x)=f(x)+f(2-x)-4$ □ $0<x \leqslant 1$ □

$F'(x)=\frac{4(x-1)^3}{x(x-2)} \geqslant 0$ □ $F(x)$ □ $(0, 1]$ □□□□□□

□□ $x_1 \in (0, 1]$ □ $F(1)=0$ □

□□ $F(x_1) \leqslant 0$ □□ $4-f(x_1) \geqslant f(2-x_1)$ □

□□ $f(x_2) \geqslant f(2-x_1)$ □□□ $f(x)$ □□□□□□ $x_2 \geqslant 2-x_1$ □

□□□□□□□

2□□□□□ $f(x)=\frac{1}{2a}x^2-(1+\frac{1}{a^2})x+\frac{1}{a}lnx(a\in R)$ □

□1□□ $a>0$ □□□□□□ $f(x)$ □□□□□

(2) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，设 $g(x)=f(x)+6x$，若正实数 x_1，x_2 满足 $g(x_1)+g(x_2)=4$，求证：$x_1+x_2\geq 2$.

【解答】解：(1) $f'(x)=\frac{1}{a}(x+\frac{1}{x})-(1+\frac{1}{a^2})$，$(x>0)$

$f'(x)=\frac{1}{a}(x+\frac{1}{x})-(1+\frac{1}{a^2})$，在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，

且 $f'(x)_{min}=f(1)=-(\frac{1}{a}-1)^2\leq 0$

∴当 $a=1$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a\neq 1$ 时，$f'(x)=0$ 的根为 $\frac{1}{a}$，a

∴ $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$，$(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,\frac{1}{a})$ 单调递减；

$a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},a)$ 单调递减；

证明：(2) $g(x)=2\ln x+x^2-5x$，$x>0$.

由 $g(x_1)+g(x_2)=4$，即 $2\ln x_1+x_1^2+x_1+2\ln x_2+x_2^2+x_2-4=0$，

从而 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-4=2x_1x_2-2\ln(x_1x_2)$，…（8分）

令 $t=x_1x_2$，则由 $G(t)=t-\ln t$ 得：$G'(t)=1-\frac{1}{t}$

可知，$G(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

∴ $G(t)\geq G(1)=1$，…（10分）

∴ $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-4\geq 2$，

∴ $(x_1+x_2+3)(x_1+x_2-2)\geq 0$，

又 $x_1>0$，$x_2>0$，∴ $x_1+x_2\geq 2$.

3. 已知函数 $f(x)=\ln x+2x-ax^2$，$a\in R$.

□I□□ $f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□□ a □□□

□II□□ $g(x)=f(x)+(a-4)x$ □□□□□□ $g(x)$ □□□□□

□III□□ $a=-2$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)+3x_1x_2=x_1+x_2$ □□□□ $x_1+x_2>\frac{1}{2}$ □

□□□□□□□I□□□ $f(x)=\ln x+2x-ax^2$ □□□ $f'(x)=\frac{1}{x}+2-2ax$ □

□□ $f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□□□ f' □1□ $=1+2-2a=0$ □□□□ $a=\frac{3}{2}$ □

□□□□ $a=\frac{3}{2}$ □□ $f'(x)=\frac{1}{x}+2-3x=-\frac{(3x+1)(x-1)}{x}\ (x>0)$ □

□□ $f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□□

□II□□□ $g(x)=f(x)+(a-4)x=\ln x-ax^2+(a-2)x$ □

□□ $g'(x)=-\frac{(ax+1)(2x-1)}{x}\ (x>0)$ □

① □ $a\geq 0$ □□□ $x\in(0,\frac{1}{2})$ □□ $g'(x)>0$ □

□□□□ $g(x)$ □ $(0,\frac{1}{2})$ □□□□□□

□ $x\in(\frac{1}{2}$ □ $+\infty)$ □□ $g'(x)<0$ □

$\therefore$ □□ $g(x)$ □ $(\frac{1}{2}$ □ $+\infty)$ □□□□□□

② □ $a<0$ □ $g'(x)=-\frac{a(x+\frac{1}{a})(2x-1)}{x}\ (x>0)$ □

□ $a<-2$ □□□□□□ $g(x)$ □ $(0,-\frac{1}{a})$ □ $(\frac{1}{2}$ □ $+\infty)$ □□□□□□□ $(-\frac{1}{a}$ □ $\frac{1}{2})$ □□□□□□

□ $a=-2$ □□ $g'(x)\geq 0$ □□□□□□□□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $-2<a<0$ □□□□□□ $g(x)$ □ $(0,\frac{1}{2})$ □ $(-\frac{1}{a}$ □ $+\infty)$ □□□□□□□ $(\frac{1}{2}$ □ $-\frac{1}{a})$ □□□□□□

（Ⅲ）证明：当 $a=-2$ 时，$f(x)=\ln x+2x+2x^2$，

因为 $f(x_1)+f(x_2)+3x_1x_2=x_1+x_2$，

所以 $\ln x_1+2x_1+2x_1^2+\ln x_2+2x_2+2x_2^2+3x_1x_2=x_1+x_2$，

即 $\ln x_1x_2+2(x_1^2+x_2^2)+(x_1+x_2)+3x_1x_2=0$，

所以 $2(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1x_2-\ln x_1x_2$，

令 $t=x_1x_2$，$\varphi(t)=t-\ln t(t>0)$，

则 $\varphi'(t)=\frac{t-1}{t}(t>0)$，

当 $t\in(0,1)$ 时，$\varphi'(t)<0$，

所以函数 $\varphi(t)=t-\ln t(t>0)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，

所以函数 $\varphi(t)=t-\ln t(t>0)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $\varphi(t)$ 在 $t=1$ 时，取得最小值，最小值为 1.

所以 $2(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geq 1$，

即 $2(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-1\geq 0$，

所以 $x_1+x_2\geq\frac{1}{2}$ 或 $x_1+x_2\leq -1$，

因为 x_1，x_2 为正实数，所以当 $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ 时，$x_1x_2=1$，

此时不存在 x_1，x_2 满足条件，

所以 $x_1+x_2>\frac{1}{2}$.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\log_a x$，$(a>0$ 且 $a\neq1)$ 为定义域上的增函数，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数，且 $f'(x)$ 的最小值小于等于0.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 设函数 $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^3-4\ln x+6x$，且 $g(x_1)+g(x_2)=0$，求证：$x_1+x_2\geqslant 2+\sqrt{6}$.

【解答】(Ⅰ) 解：$f'(x)=2x^2-3x+\frac{1}{x\ln a}$，

由 $f(x)$ 为增函数可得，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $2x^2-3x+\frac{1}{x\ln a}\geqslant 0$，得 $2x^3-3x^2\geqslant -\frac{1}{\ln a}$，

设 $m(x)=2x^3-3x^2$，则 $m'(x)=6x^2-6x(x>0)$，

由 $m'(x)=6x(x-1)>0$，得 $x>1$，由 $m'(x)=6x(x-1)<0$，得 $0<x<1$.

$\therefore m(x)$ 在 $(0,1)$ 上减，在 $(1,+\infty)$ 上增，在1处取得极小值即最小值，

$\therefore m(x)_{min}=m(1)=-1$，则 $-1\geqslant -\frac{1}{\ln a}$，即 $1\leqslant \frac{1}{\ln a}$，

当 $a>1$ 时，易知 $a\leqslant e$，当 $0<a<1$ 时，则 $\frac{1}{\ln a}<0$，这与 $1\leqslant \frac{1}{\ln a}$ 矛盾，从而不能使得 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

$\therefore a\leqslant e$；

由 $f'(x)_{min}\leqslant 0$ 可得，$2x^2-3x+\frac{1}{x\ln a}\leqslant 0$，即 $2x^3-3x^2\leqslant -\frac{1}{\ln a}$，

由之前讨论可知，$-1\leqslant -\frac{1}{\ln a}$，当 $1>a>0$ 时，$-1\leqslant -\frac{1}{\ln a}$ 恒成立，

当 $a>1$ 时，由 $1\geqslant \frac{1}{\ln a}$，得 $a\geqslant e$，

综上 $a=e$；

(Ⅱ) 证明：$g(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\ln x-\frac{2}{3}x^3-4\ln x+6x=-\frac{3}{2}x^2-3\ln x+6x$，

∵ $g(x_1)+g(x_2)=0$，

$\therefore -\frac{3}{2}x_1^2-3\ln x_1+6x_1+(-\frac{3}{2}x_2^2-3\ln x_2+6x_2)=0$，

∴ $-\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2)-3ln(x_1x_2)+6(x_1+x_2)=0$ □

□ $-\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-ln(x_1x_2)+2(x_1+x_2)=0$ □

□ $-\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+x_1x_2-ln(x_1x_2)+2(x_1+x_2)=0$

∴ $-\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2)=ln(x_1x_2)-x_1x_2$ □

□ $x_1x_2=t$ □ $g(t)=lnt-t$ □

□ $g'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$ □ $g(t)$ □ $(0,1)$ □□□□ $(1,+\infty)$ □□□ $g(t)\leqslant g$ □1□ $=-1$ □

∴ $-\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2)\leqslant -1$ □

□□□ $(x_1+x_2)^2-4(x_1+x_2)-2\geqslant 0$ □

□□ $x_1+x_2\geqslant 2+\sqrt{6}$ □ $x_1+x_2\leqslant 2-\sqrt{6}$ □□) □

∴ $x_1+x_2\geqslant 2+\sqrt{6}$ □

5□□□□□ $f(x)=lnx-\frac{1}{2}ax^2+x$ □

□1□□ f' □1□ $=0$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□

□2□□ $a=-2$ □□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$ □□□□ $x_1+x_2\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ □

□□□□□□1□□□ f' □1□ $=0$ □

□□ $ln1-\frac{1}{2}a+1=0$ □□□ $a=2$ □

□□ $f(x)=lnx-x^2+x$ □

$f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}=\frac{(2x+1)(-x+1)}{x}$ □

□ $f'(x)<0$ □□ $x>1$ □

□□ $f(x)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □

□2□□□□ $a=-2$ □□

□□ $f(x)=lnx+x^2+x$ □

□□ $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=lnx_1+x_1^2+x_1+lnx_2+x_2^2+x_1x_2+x_2$

$=(x_1+x_2)^2+x_1+x_2+lnx_1x_2-x_1x_2$ □

□ $g(x)=lnx-x$ □

□ $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1$ □

□□ $0<x<1$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

$x>1$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□□ $g(x)_{max}=g$ □1□ $=-1$ □

□□ $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2\leqslant(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-1$ □

□ $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-1\geqslant0$ □

□□ x_1 □ x_2 □□□□□

□□ $x_1+x_2\geqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ □

6□□□□□ $f(x)=lnx-mx^2$ □ $g(x)=\dfrac{1}{2}mx^2+x$ □ $m\in R$ □□ $F(x)=f(x)+g(x)$ □

□I□ $m=\dfrac{1}{2}$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□

□II□□□□ x □□□□ $F(x)\leqslant mx-1$ □□□□□□□ m □□□□□

□III□ $m=-2$ □□□□ x_1 □ x_2 □□ $F(x_1)+F(x_2)+x_1x_2=0$ □□□□ $x_1+x_2\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ □

□□□□□□I□ $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ □ $x>0$ □

$f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}(x>0)$

□ $f'(x)>0$ □□ $1-x^2>0$ □□ $x>0$ □

□□ $0<x<1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□ $(0,1)$ □

□II□□□□□ $G(x)=F(x)-(mx-1)=\ln x-\frac{1}{2}mx^2+(1-m)x+1$ □

□□ $G'(x)=\frac{1}{x}-mx+(1-m)=\frac{-mx^2+(1-m)x+1}{x}$ □

□ $m\leq 0$ □□□□ $x>0$ □□□ $G'(x)>0$ □

□□ $G(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□

□□□ $G(1)=\ln 1-\frac{1}{2}m\times 1^2+(1-m)+1=-\frac{3}{2}m+2>0$ □

□□□□ x □□□□ $G(x)\leq mx-1$ □□□□□□

□ $m>0$ □□ $G'(x)=\frac{-mx^2+(1-m)x+1}{x}=\frac{m(x-\frac{1}{m})(x+1)}{x}$ □

□ $G'(x)=0$ □□ $x=\frac{1}{m}$ □□□□ $x\in(0,\frac{1}{m})$ □□ $G'(x)>0$ □□ $x\in(\frac{1}{m},+\infty)$ □□ $G'(x)<0$ □

□□□□ $G(x)$ □ $x\in(0,\frac{1}{m})$ □□□□□□ $x\in(\frac{1}{m},+\infty)$ □□□□□

□□□ $G(x)$ □□□□□ $G(\frac{1}{m})=\ln\frac{1}{m}-\frac{1}{2}m\times(\frac{1}{m})^2+(1-m)\times\frac{1}{m}+1=\frac{1}{2m}-\ln m$ □

□ $h(m)=\frac{1}{2m}-\ln m$ □□□ $h(1)=\frac{1}{2}>0$ □ $h(2)=\frac{1}{4}-\ln 2<0$ □

□□□ $h(m)$ □ $m\in(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $m\geq 2$ □□ $h(m)<0$ □□□□□ m □□□□□2□

□□□□□2□□ $F(x)\leq mx-1$ □□□□

□ $\ln x-\frac{1}{2}mx^2+x\leq mx-1$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□□□□ $m\geq\dfrac{\ln x+x+1}{\frac{1}{2}x^2+x}$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $h(x)=\dfrac{\ln x+x+1}{\frac{1}{2}x^2+x}$ □□□ $m\geq h(x)_{max}$ □

□□ $h'(x)=\dfrac{(x+1)(-\frac{1}{2}x-\ln x)}{(\frac{1}{2}x^2+x)^2}$ □□ $h'(x)=0$ □□ $-\frac{1}{2}x-\ln x=0$ □

□ $\varphi(x)=-\frac{1}{2}x-\ln x$ □□□ $\varphi'(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}<0$ □

□□ $\varphi(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□ $-\frac{1}{2}x-\ln x=0$ □□□ x_0 □

□ $x\in(0,x_0)$ □□ $h'(x)>0$ □□ $x\in(x_0,+\infty)$ □ □□ $h'(x)<0$ □

□□ $h(x)$ □ $x\in(0,x_0)$ □□□□□□□ $x\in(x_0,+\infty)$ □ □□□□□□

$$h(x)_{max}=h(x_0)=\frac{\ln x_0+x_0+1}{\frac{1}{2}x_0^2+x_0}=\frac{1+\frac{1}{2}x_0}{x_0(1+\frac{1}{2}x_0)}=\frac{1}{x_0}$$

□□ □

□□ $\varphi(\frac{1}{2})=\ln 2-\frac{1}{4}>0$ $\varphi(1)=-\frac{1}{2}<0$ □

□□ $\frac{1}{2}<x_0<1$ □□□ $1<\frac{1}{x_0}<2$ □ $g(x)_{max}\in(1,2)$ □

□□ $m\geq 2$ □□□□ m □□□□□2□

（Ⅲ） $m=-2$ $F(x)=\ln x+x^2+x$ $x>0$

$F(x_1)+F(x_2)+x_1x_2=0$ $\ln x_1+x_1^2+x_1+\ln x_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$

$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1\cdot x_2-\ln(x_1\cdot x_2)$

$t=x_1\cdot x_2$ $\varphi(t)=t-\ln t$ $\varphi'(t)=\frac{t-1}{t}$

$\varphi'(t)$ $(0,1)$ $(1,+\infty)$

$\varphi(t)\geq\varphi(1)=1$ $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geq 1$

$(x_1+x_2)\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

7． $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+(1-a)x$，$a\in R$。

（Ⅰ） $f(x)$

（Ⅱ） $a=-2$ x_1 x_2 $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$ $x_1+x_2>\frac{1}{4}$

（Ⅰ） $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}+(1-a)x$ $a\in R$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-ax+(1-a)=\frac{-ax^2+(1-a)x+1}{x}$

$a\leq 0$ $x>0$ $\therefore f'(x)>0$ $\therefore f(x)$ $(0,+\infty)$

$f(x)$ $(0,+\infty)$

$a>0$ $f'(x)=-\frac{a(x-\frac{1}{a})(x+1)}{x}$ $f'(x)=0$ $x=\frac{1}{a}$ $\therefore$ $x\in(0,\frac{1}{a})$ $f'(x)>0$

$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$ $f'(x)<0$

$\therefore f(x)$ $(0,\frac{1}{a})$ $(\frac{1}{a},+\infty)$

$a \leq 0$ $f(x)$ $(0,+\infty)$

$a>0$ $f(x)$ $(0,\frac{1}{a})$ $(\frac{1}{a},+\infty)$

(II) $a=-2$ $f(x)=lnx+x^2+3x \ (x>0)$

x_1 x_2 $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$

$\Rightarrow lnx_1+x_1^2+3x_1+lnx_2+x_2^2+3x_2+x_1x_2=0$

$\Rightarrow (x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)=x_1x_2-ln(x_1x_2)$

$g(t)=t-lnt \ (t>0)$ $g'(t)=1-\frac{1}{t}$

$t\in(0,1)$ $g'(t)<0$ $t\in(1,+\infty)$ $g'(t)>0$

$\therefore g(t)\geq g(1)=1$

$\therefore (x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)=x_1x_2-ln(x_1x_2)\geq 1$

$x_1+x_2\geq\frac{\sqrt{13}-3}{2}$ $x_1+x_2\leq\frac{-\sqrt{13}-3}{2}$ ( )

$\therefore x_1+x_2\geq\frac{\sqrt{13}-3}{2}$

$\frac{\sqrt{13}-3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{13}-7}{2}=\frac{\sqrt{52}-\sqrt{49}}{2}>0$

$\therefore x_1+x_2>\frac{1}{4}$

8 $f(x)=lnx-x^2+x$

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□

□2□□□□ x □□□□ $f(x)\le(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1$ □□□□□□□ a □□□□□

□3□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)+2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2=0$ □□□ $x_1+x_2\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ □

□□□□□□1□□□ $f(x)=\ln x-x^2+x$ □□□□ $f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}$ □

□ $f'(x)<0$ □□ $2x^2-x-1>0$ □

□ $x>0$ □□□ $x>1$ □

□□ $f(x)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □

□2□□□ x □□□□ $f(x)\le(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1$ □□□□

□□ $f(x)-[(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1]\le 0$ □□□□

□ $g(x)=f(x)-[(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1]=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+(1-a)x+1$ □

$g(x)_{max}\le 0$ □

□□ $g'(x)=\frac{1}{x}-ax+1-a=\frac{-ax^2+(1-a)x+1}{x}$ □

□ $-ax^2+(1-a)x+1=(-ax+1)(x+1)$ □

□□ $x>0$ □ $a\le 0$ □ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□□□

□$a>0$□□$x>\frac{1}{a}$□$g(x)$□□□

$0<x<\frac{1}{a}$□$g(x)$□□□

□□$x=\frac{1}{a}$□$g(x)$□□□□□□□□□□□$-\ln a-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1-a}{a}+1$

$=-\ln a+\frac{1}{a}$□

□□$-\ln a+\frac{1}{a}\leqslant 0$□

□$a\ln a\geqslant 1$□□□□

□□□□a□□□□□2□

□3□□□□□□□x_1□x_2□□$f(x_1)+f(x_2)+2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2=0$□

□$\ln x_1+x_1^2+x_1+\ln x_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$□

□□$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1\cdot x_2-\ln(x_1\cdot x_2)$□

□$t=x_1\cdot x_2$□□□$\varphi(t)=t-\ln t$□□$\varphi'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$□

□□□$\varphi(t)$□□□$(0,1)$□□□□□□□□□$(1,+\infty)$□□□□□□

□□$\varphi(t)\geqslant\varphi$□1□$=1$□

□□$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geqslant 1$□

□ $x_1 + x_2 > 0$ □

□□ $x_1 + x_2 \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ □□□

9□□□□□ $f(x) = lnx - x^2 + x$ □

□I□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□II□□□□ $a \geqslant 2$ □□□□ x □□□□ $f(x) < (\frac{a}{2} - 1)x^2 + ax - 1$ □□□□

□III□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1) + f(x_2) + 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2 = 0$ □□□ $x_1 + x_2 \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ □

□□□□□□□I□ $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}(x > 0)$ □

□ $f'(x) < 0$ □□ $2x^2 - x - 1 > 0$ □

□ $x > 0$ □□□ $x > 1$ □

□□ $f(x)$ □□□□□□□ $(1, +\infty)$ □□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,1)$ □

□II□□ $g(x) = f(x) - [(\frac{a}{2} - 1)x^2 + ax - 1] = lnx - \frac{1}{2}ax^2 + (1 - a)x + 1$ □

□□ $g'(x) = \frac{1}{x} - ax + (1 - a) = \frac{-ax^2 + (1 - a)x + 1}{x}$ □

□□ $a \geqslant 2$ □

□□ $g'(x) = -\frac{a(x - \frac{1}{a})(x + 1)}{x}$ □

□ $g'(x) = 0$ □□ $x = \frac{1}{a}$ □

$x=(0,\frac{1}{a})$，$g'(x)>0$；

$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$，$g'(x)<0$；

$g(x)$，$x\in(0,\frac{1}{a})$，$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$

$g(x)$，$g(\frac{1}{a})=ln(\frac{1}{a})-\frac{1}{2}a\times(\frac{1}{a})^2+(1-a)\times(\frac{1}{a})+1=\frac{1}{2a}-lna$

$h(a)=(\frac{1}{2a})-lna$，$h(2)=\frac{1}{4}-ln2<0$

h（a）$a\in(0,+\infty)$

$a..2$，h（a）<0

x，$g(x)<0$

x，$f(x)<(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1$

（Ⅲ）$f(x_1)+f(x_2)+2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2=0$

$lnx_1+x_1^2+x_1+lnx_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$

$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1\cdot x_2-ln(x_1\cdot x_2)$

$t=x_1\cdot x_2$，$\varphi(t)=t-lnt$，$\varphi'(t)=\frac{t-1}{t}$

$\varphi(t)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$

$\varphi(t)..\varphi$（1）$=1$

$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)..1$

$x_1+x_2>0$

$x_1+x_2\ldots\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

□□ □□□

10□□□□□ $f(x)=lnx-\frac{1}{2}ax^2+x, a\in R$ □

□1□□ f □1□ $=0$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□□

□2□□□□ x □□□□ $f(x)\leqslant ax-1$ □□□□□□□ a □□□□□

□3□□ $a=-2$ □□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$ □□□□ $x_1+x_2>\frac{e}{5}$ □

□□□□□□1□ $f(x)=lnx-\frac{1}{2}ax^2+x$ □ f □1□ $=0$ □

$\therefore a=2$ □□ $x>0$ □

$\therefore f(x)=lnx-x^2+x$ □

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=-\frac{2x^2-x-1}{x}$ □

□ $f'(x)<0$ □□ $x>1$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□

$\therefore$ □□ $f(x)$ □□□□□□ $(1,+\infty)$ □

□2□□ $F(x)=f(x)-ax+1=lnx-\frac{1}{2}ax^2+(1-a)x+1$ □

□ $F'(x)=\frac{1}{x}-ax+1-a=-\frac{ax^2+(a-1)x-1}{x}=-a\frac{(x+1)(x-\frac{1}{a})}{x}$ □

□ $a\leqslant 0$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□ $F(x)$ □□□□□

□ F □1□ $=2-\frac{3}{2}a>0$ □□□□□□□

□ $a>0$ □□□□ $F(x)$ □ $x=\frac{1}{a}$ □□□□□□ $F(\frac{1}{a})=ln\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}$ □

□ h □a□ $=ln\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{2a}-lna$ □

□□□□□□□□□□□□□□$a>0$□□h□a□□□□□□

□ $h(1)=\frac{1}{2}>0$ □ $h(2)=\frac{1}{4}-\ln 2<0$ □

$\therefore$□□□□□□□a□□□□□2□

□3□ $a=-2$ □

$\therefore f(x)=\ln x+x^2+x$ □

$\therefore f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=\ln x_1+x_1^2+x_1+\ln x_2+x_2^2+x_1x_2+x_2$

$=(x_1+x_2)^2+x_1+x_2+\ln x_1x_2-x_1x_2$

□ $g(x)=\ln x-x$ □□ $g'(x)=\frac{1}{x}-1$ □

$\therefore 0<x<1$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

$x>1$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

$\therefore g(x)_{max}=g(1)=-1$ □

$\therefore f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2\leq(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-1$ □

□ $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-1\geq 0$ □

□ x_1 □ x_2 □□□□□

$\therefore x_1+x_2\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ □

□□□ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{e}{5}$ □

□□ $x_1+x_2>\frac{e}{5}$ □12 □□

11□□□□□ $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+(1-a)x$ □ $a\in R$ □

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $a=-2$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$ □□□□ $x_1+x_2>\frac{1}{4}$ □

□□□□□□1□ $f(x)=lnx-\frac{1}{2}+(1-a)x$ □ $a\in R$ □

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-ax+(1-a)=\frac{-ax^2+(1-a)x+1}{x}$ ... □ □1 □□

□ $a\leq 0$ □□ $x>0$ □ $\therefore f'(x)>0$ □ $\therefore f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□□ ... □3 □□

□ $a>0$ □□ $f'(x)=\frac{-a(x-\frac{1}{a})(x+1)}{x}$ □□ $f'(x)=0$ □□ $x=\frac{1}{a}$ □ $\therefore$ □ $x\in(0,\frac{1}{a})$ □□ $f'(x)>0$ □

□ $x\in(\frac{1}{a}$ □ $+\infty)$ □□ $f'(x)<0$ □

$\therefore f(x)$ □□□□□□□□ $(0,\frac{1}{a})$ □□□□□□□□ $(\frac{1}{a}$ □ $+\infty)$ □ ... □5 □□

□□□□ $a\leq 0$ □□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□□

□ $a>0$ □□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,\frac{1}{a})$ □□□□□□□□ $(\frac{1}{a}$ □ $+\infty)$ □ ... □6 □□

□2□□ $a=-2$ □□ $f(x)=lnx+x^2+3x\ (x>0)$ □

□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$ □

$\Rightarrow lnx_1+x_1^2+3x_1+lnx_2+x_2^2+3x_2+x_1x_2=0$ □

$\Rightarrow (x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)=x_1x_2-ln(x_1x_2)$

□□□ $g(t)=t-lnt$ □ $(t>0)$ □□ $g'(t)=1-\frac{1}{t}$

$t\in(0,1)$ □□ $g'(t)<0$ □ $t\in(1,+\infty)$ □□ $g'(t)>0$

$\therefore g(t) \geq g$□1□$=1$

$\therefore (x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)=x_1x_2-\ln(x_1x_2)\geq 1$□

□$x_1+x_2\geq\frac{\sqrt{13}-3}{2}$□□$x_1+x_2\leq\frac{-\sqrt{13}-3}{2}$□□□□

$\frac{\sqrt{13}-3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{13}-7}{4}=\frac{\sqrt{52}-7}{4}>0$□

$\therefore x_1+x_2\geq\frac{\sqrt{13}-3}{2}>\frac{1}{4}$□

12□□□□□$f(x)=2\ln x+x^2+(a-1)x-a\ (a\in R)$□□□$x\geq 1$□□$f(x)\geq 0$□□□□

□1□□□□a□□□□□

□2□□□□□x_1□$x_2(x_1\neq x_2)$□□$f(x_1)+f(x_2)=0$□□□□$x_1+x_2>2$□

□□□□□□$f'(x)=\frac{2}{x}+2x+(a-1)$

□1□□□$a\geq -3$□□$f'(x)=\frac{2}{x}+2x+(a-1)\geq a+3\geq 0$□$f$□1□$=0$□

$\therefore$□$x\geq 1$□□$f(x)\geq 0$□□□$\cdots\geq 3$□

□$a<-3$□□□□□□1□□□□□m□□□$f'(m)=0$

$\therefore$□$1<x<m$□□$f'(x)<0$□□□

$\therefore f(x)$□□□$(1,m)$□□□□□□

$\therefore$□$1<x<m$□□$f(x)<f$□1□$=0$□

$\therefore a<-3$□□□□□□

$a = -3$ ⋯⋯6

（2） $x_1 < x_2$

x_1，x_2，$f(x_1)+f(x_2)=0$

（1） $0<x_1<1<x_2$

$f(x)$

$x_1+x_2>2 \Leftrightarrow x_2>2-x_1 \Leftrightarrow f(x_2)>f(2-x_1)$

$f(x_1)+f(x_2)=0 \Leftrightarrow f(x_2)=-f(x_1)$

$-f(x_1)>f(2-x_1) \Leftrightarrow f(x_1)+f(2-x_1)<0$ ⋯⋯8

$g(x)=f(x)+f(2-x)$，$g(x)=2[\ln x+\ln(2-x)+x^2-2x+1]$

$$g'(x)=\frac{4(x-1)^3}{x(x-2)}$$

$\therefore$ $0<x<1$，$g'(x)>0$

$\therefore g(x)$ $(0,1)$

$g(1)=0$

$\therefore$ $0<x<1$，$g(x)<0$，$f(x)+f(2-x)<0$

$f(x_1)+f(2-x_1)<0$

$x_1+x_2>2$ ⋯⋯12

13． $f(x)=ae^{2x}+e^x+x$，$a\in R$

（1） $f(x)$ $x=0$ a

□2□□ $g(x)=f(x)-(a+3)e^x$ □□□□□□ $g(x)$ □□□□□

□3□□ $a=2$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $f(x_1)+f(x_2)+3e^{x_1}e^{x_2}=0$ □□□□ $e^{x_1}+e^{x_2}>\frac{1}{2}$ □

□□□□□□1□□□ $f(x)=ae^{2x}+e^x+x$ □□□ $f'(x)=2ae^{2x}+e^x+1$ □

□□ $f(x)$ □ $x=0$ □□□□□□

□□ $f'(0)=2a+1+1=0$ □□□ $a=-1$ □

□□□□ $a=-1$ □□ $f'(x)=-(2e^x+1)(e^x-1)$ □

□□ $f(x)$ □ $x=0$ □□□□□□□ ………… □3 □□

□2□□□ $g(x)=f(x)-(a+3)e^x=ae^{2x}-(a+2)e^x+x$ □

□□ $g'(x)=2ae^{2x}-(a+2)e^x+1=2ae^{2x}-(a+2)e^x+1=(ae^x-1)(2e^x-1)$

………… □4 □□

① □ $a\leqslant 0$ □□□ $x\in(-\infty,-\ln 2)$ □□ $g'(x)>0$ □

□□□□ $g(x)$ □ $(-\infty,-\ln 2)$ □□□□□□

□ $x\in(-\ln 2,+\infty)$ □□ $g'(x)<0$ □

∴ □□ $g(x)$ □ $(-\ln 2,+\infty)$ □□□□□□ ……… □5 □□

② □ $a>0$ □ $g'(x)=(ae^x-1)(2e^x-1)$ □

□ $a>2$ □□□□□□ $g(x)$ □ $(-\infty,-\ln a)$ □ $(-\ln 2,+\infty)$ □□□□□□

□ $(-\ln a,-\ln 2)$ □□□□□□

□ $a=2$ □□ $g'(x)\geqslant 0$ □□□□□□□□ $g(x)$ □ $(-\infty,+\infty)$ □□□□□□

□ $0<a<2$ □□□□□□ $g(x)$ □ $(-\infty,-ln2)$ □ $(-lna,+\infty)$ □□□□□□

□ $(-ln2,-lna)$ □□□□□□ ………… □8 □□

□3□□□□ $a=2$ □□

□□ $f(x_1)+f(x_2)+3e^{x_1}e^{x_2}=0$ □

□□ $2e^{2x_1}+e^{x_1}+x_1+2e^{2x_2}+e^{x_2}+x_2+3e^{x_1}e^{x_2}=0$ □

□□ $2(e^{x_1}+e^{x_2})^2+(e^{x_1}+e^{x_2})=e^{x_1}e^{x_2}-x_1-x_2=e^{x_1+x_2}-(x_1+x_2)$ □

□ $t=x_1+x_2$ □ $\varphi(t)=e^t-t$ □

□ $\varphi'(t)=e^t-1=0$ □

□ $t\in(-\infty,0)$ □□ $\varphi'(t)<0$ □□□□□ $\varphi(t)=e^t-t$ □ $(-\infty,0)$ □□□□□□

□ $t\in(0,+\infty)$ □□ $\varphi'(t)>0$ □□□□□ $\varphi(t)=e^t-t$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□□ $\varphi(t)=e^t-t$ □ $t=0$ □□□□□□□□□□□□□1□ ………… □10 □□

□□ $2(e^{x_1}+e^{x_2})^2+(e^{x_1}+e^{x_2})\geqslant 1$ □

□ $2(e^{x_1}+e^{x_2})^2+(e^{x_1}+e^{x_2})-1\geqslant 0$ □□□ $e^{x_1}+e^{x_2}\geqslant\frac{1}{2}$ ………… □11 □□

□ $x_1+x_2=t=0$ □□ $e^{x_1}+e^{x_2}\geqslant 2\sqrt{e^{x_1+x_2}}=2>\frac{1}{2}$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□□□□□□□□

□□ $e^{x_1}+e^{x_2}>\frac{1}{2}$ □ ………… □12 □□

14□□□□□ $f(x)=e^x(x-\frac{a}{x}-2)$ □□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $e=2.71828\cdots$ □□□□□□□□□□

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□ $f(x_1)+f(x_2)=-4e$ □□□□ $x_1+x_2\geqslant 2$ □

□□□□□□1□□□ $f'(x)=\frac{e^x(x-1)(x^2-a)}{x^2}$ □

①□ $a\leq 0$ □□ $f'(x)>0$ □□□□ $x>1$ □

□□□ $f(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□

②□ $0<a<1$ □□ $f'(x)>0$ □□□□ $0<x<\sqrt{a}$ □□ $x>1$ □

□ $f'(x)<0$ □□□□ $\sqrt{a}<x<1$ □

□ $f(x)$ □ $(0,\sqrt{a})$ □□□□ $(\sqrt{a},1)$ □ □□□□ $(1,+\infty)$ □□□

③□ $a=1$ □□ $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2(x+1)}{x^2}\geq 0$ □

□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□

④□ $a>1$ □□ $f'(x)>0$ □□□□ $0<x<1$ □ $x>\sqrt{a}$ □

□ $f'(x)<0$ □□□□ $1<x<\sqrt{a}$ □

□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□ $(1,\sqrt{a})$ □□□□ $(\sqrt{a},+\infty)$ □ □□□

□□□□ $a\leq 0$ □ $f(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□

□ $0<a<1$ □ $f(x)$ □ $(0,\sqrt{a})$ □ $(1,+\infty)$ □□□

□ $a=1$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□

□ $a>1$ □ $f(x)$ □ $(0,1)$ □ $(\sqrt{a},+\infty)$ □□□

□2□ □□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□

$\therefore a=1$ □□ $f(x)=e^x(x-\frac{1}{x}-2)$ □

注意到 $f(1)=-2e$，故 $f(x_1)+f(x_2)=-4e=2f(1)$，

即证 $-4e-f(x_1)\geq f(2-x_1)$，即证 $f(x_1)+f(2-x_1)\leq -4e$，

令 $h(x)=f(x)+f(2-x)$，$0<x\leq 1$，

只需证明 $h(x)\leq h(1)$，

故 $h'(x)=f'(x)+f'(2-x)=e^{2-x}(x-1)^2\left[\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{(3-x)}{(2-x)^2}\right]$，

下面证明 $h'(x)\geq 0$，即证 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geq 0$，

由熟知的不等式 $e^x\geq 1+x$ 可知 $e^{2x-2}=(e^{x-1})^2\geq(1+x-1)^2=x^2$，

当 $0<x\leq 1$ 时，即 $\dfrac{e^{2x-2}}{x^2}\geq 1$，

故 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geq x+1-\dfrac{3-x}{(x-2)^2}=\dfrac{x^3-3x^2+x+1}{(x-2)^2}$，

易知当 $0<x\leq 1$ 时，$x^2-2x-1<0$，

故 $x^3-3x^2+x+1=(x-1)(x^2-2x-1)\geq 0$，

故 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geq 0$，

故 $h'(x)\geq 0$，即 $h(x)$ 递增，即 $h(x)\leq h(1)$，

从而 $x_1+x_2\geq 2$.

15. 已知函数 $f(x)=x^2-4x+5-\dfrac{a}{e^x}(a\in R)$.

(Ⅰ) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增函数，求 a 的取值范围；

（II） $g(x)=e^x f(x)$ $m\geq 1$ $g(x_1)+g(x_2)=2g(m)$ $x_1\neq x_2$ $x_1+x_2<2m$

1 $f(x)=x^2-4x+5-\frac{a}{e^x}$ $(-\infty,+\infty)$

$\therefore$ $x\in R$ $f'(x)=2x-4+\frac{a}{e^x}\geq 0$

$a\geq(4-2x)e^x$ …… 2

$\therefore$ $h(x)=(4-2x)e^x$ $x\in R$

$h'(x)=(2-2x)e^x$

$\therefore$ $x\in(-\infty,1)$ $h'(x)>0$ $h(x)$ $x\in(-\infty,1)$

$\therefore$ $x\in(1,+\infty)$ $h'(x)<0$ $h(x)$ $x\in(1,+\infty)$

$\therefore h(x)_{max}=h$ （1） $=2e$

$a\geq[(4-2x)e^x]_{max}$

$\therefore a\geq 2e$ $a\in[2e\ \ +\infty)$ …… 4

（2） $g(x)=e^x(x^2-4x+5)-a$

$g'(x)=e^x(x-1)^2\geq 0$

$g(x)$ $(-\infty,+\infty)$ …… 6

$g(x_1)+g(x_2)=2g(m)$

$g(x_1)-g(m)=g(m)-g(x_2)$

$g(x_1)-g(m)$ $g(m)-g(x_2)$

$x_1<m<x_2$ $h(x)=g(2m-x)+g(x)-2g(m)(x>m\geq 1)$ …… 8

$h'(x) = -e^{2m-x}(2m-x-1)^2 + e^x(x-1)^2$
□□ □

$e^{2m-x} < e^x$，$(2m-x-1)^2 - (x-1)^2 = (2m-2)(2m-2x) \leqslant 0$
□□ □ □

$h'(x) > 0$，$h(x)$ $(m,+\infty)$ ......
□□ □ □ □□□□□ □10 □□

$h(x) > h(m) = 0$，$h(x_2) = g(2m-x_2) + g(x_2) - 2g(m) > 0$
□□ □ □

$g(2m-x_2) > 2g(m) - g(x_2) = g(x_1)$
□□ □

$2m - x_2 > x_1$，$x_1 + x_2 < 2m$ ......
□□ □□ □ □12 □□

$g(x) = e^x f(x)$
□□□□

$= (x^2 - 4x + 5)e^x - ag(x_1) + g(x_2)$

$= 2g(m)$，$m \in [1, +\infty)$
□ □ □

$\therefore (x_1^2 - 4x_1 + 5)e^{x_1} - a + (x_2^2 - 4x_2 + 5)e^{x_2} - a = 2(m^2 - 4m + 5)e^m - 2a$
□

$\therefore (x_1^2 - 4x_1 + 5)e^{x_1} + (x_2^2 - 4x_2 + 5)e^{x_2} = 2(m^2 - 4m + 5)e^m$
□

$\therefore \varphi(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$，$x \in R$
□ □

$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = 2\varphi(m)$
□ □

$\therefore \varphi'(x) = (x-1)^2 e^x \geqslant 0$，$\varphi(x)$ $x \in R$ φ' (1) $= 0$ ......
□ □ □□□□ □1□ □ □6 □□

$x_1 \in (-\infty, m)$，$x_2 \in (m, +\infty)$
□ □ □

$F(x) = \varphi(m+x) + \varphi(m-x)$，$x \in (0, +\infty)$ ......
□ □ □ □8 □□

$\therefore F'(x) = (m+x-1)^2 e^{m+x} - (m-x-1)^2 e^{m-x}$
□

$\because x > 0$ $\therefore e^{m+x} > e^{m-x} > 0$
□ □

□ $(m+x-1)^2-(m-x-1)^2=(2m-2)2x\geq 0$ □

$\therefore F(x)>0$ □ $F(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□

$\therefore F(x)>F(0)=2\varphi(m)$ □

$\therefore \varphi(m+x)+\varphi(m-x)>2\varphi(m)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □ ...... □10 □□

□ $x=m-x_1$ □ $\therefore \varphi(m+m-x_1)+\varphi(m-m+x_1)>2\varphi(m)$ □

□□ $\varphi(2m-x_1)+\varphi(x_1)>2\varphi(m)$ □

□ $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=2\varphi(m)$ □

$\therefore \varphi(2m-x_1)+2\varphi(m)-\varphi(x_2)>2\varphi(m)$ □

□□ $\varphi(2m-x_1)>\varphi(x_2)$ □

□ $\varphi(x)$ □ $x\in R$ □□□□

$\therefore 2m-x_1>x_2$ □□□ $x_1+x_2<2m$ □ ...... □12 □□

16□□□□□ $f(x)=ax^2+\ln x(a\in R)$ □□□□ $-\frac{1}{2}$ □ $g(x)=x^2-2x+f(x)$ □□ $g'(x)$ □ $g(x)$ □□□□

□I□□ a □□□

□II□□□□□ $x_1<x_2$ □ $g(x_1)+g(x_2)+3=0$ □□ $g'(x_1+x_2)>\frac{1}{2}$ □

□□□□□□□I□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □ $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$ □ ... □1 □□

□ $a\geq 0$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ ... □2 □□

□ $a<0$ □□□ $f'(x)=0$ □□ $x=\sqrt{-\frac{1}{2a}}$ □

当 $x\in(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}})$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，（3 分）

∴ $f(x)_{max}=f(\sqrt{-\frac{1}{2a}})=-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}$，∴ $-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}=-\frac{1}{2}$，（4 分）∴ $a=-\frac{1}{2}$．（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x$，∴ $g'(x)=x+\frac{1}{x}-2$．

∵ $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，∴ $g'(x)\geqslant 0$，∴ $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．（6 分）

又∵ $x_1<x_2$，$g(x_1)+g(x_2)=-3$ 且 $g(1)=-\frac{3}{2}$，∴ $0<x_1<1<x_2$．（7 分）

∵ $g''(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$，∴ 当 $x>1$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，

要证 $g'(x_1+x_2)>\frac{1}{2}$，即 $g'(x_1+x_2)>g'(2)$，

只要证 $x_1+x_2>2$，即 $x_2>2-x_1$．（8 分）∵ $x_1<1$，∴ $2-x_1>1$，

所以只要证 $g(2-x_1)<g(x_2)=-3-g(x_1)\Leftrightarrow g(x_1)+g(2-x_1)<-3----(*)$，（9 分）

设 $G(x)=g(x)+g(2-x)=x^2-2x-2+\ln x+\ln(2-x)$（其中 $0<x<1$），

∴ $G'(x)=2x-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{2-x}=2(1-x)[\frac{1}{x(2-x)}-1]=\frac{2(x-1)^3}{x(x-2)}>0$，

∴ $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，（11 分）

∴ $G(x)<G(1)=-3$，故 (*) 式成立，从而 $g'(x_1+x_2)>\frac{1}{2}$．（12 分）

17. 已知函数 $f(x)=2\ln x+ax^2-1(a\in R)$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

□Ⅱ□□ $a=1$ □□□□□□□□□□

(i) □□□□ $f(1+x)+f(1-x)<m$ □□□□ $0<x<1$ □□□□□ m □□□□□□

(ii) □ x_1 □ x_2 □□□□□□□□□□ $f(x_1)+f(x_2)=0$ □□□□ $x_1+x_2>2$ □

□□□□□□□Ⅰ□ □□ $f(x)=2\ln x+ax^2-1(a\in R)$ □

$\therefore f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □ $f'(x)=\frac{2}{x}+2ax$ □

□ $f'(x)>0$ □ $x>0$ □ $\therefore 2ax^2+2>0$ □

①□ $a\geqslant 0$ □□ $f'(x)>0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□

$\therefore f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

②□ $a<0$ □□ $2ax^2+2>0$ □

$\therefore -\sqrt{-\frac{1}{a}}<m<\sqrt{-\frac{1}{a}}$ □

□ $x>0$ □ $\therefore f(x)$ □□□□□□ $(0,\frac{\sqrt{-a}}{-a})$ □□□□□□ $(\frac{\sqrt{-a}}{-a}$ □ $+\infty)$ □

□Ⅱ□ (i) □ $F(x)=f(1+x)+f(1-x)=2\ln(1+x)+2\ln(1-x)+2x^2$ □

$F'(x)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{1-x}+4x=-\frac{4x^3}{1-x^2}$ □

□ $0<x<1$ □ $\therefore F'(x)<0$ □ $0<x<1$ □□□□□

$\therefore F(x)$ □ $x\in(0,1)$ □□□□□□

$\therefore F(x)<F(0)=0$ □

$\therefore m\geqslant 0$ □□ m □□□□□□ $[0$ □ $+\infty)$ □

证明：(ii) ∵ $f(1)=0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

① 若 x_1，$x_2\in(0,1)$，则 $f(x_1)<0$，$f(x_2)<0$，

则 $f(x_1)+f(x_2)<0$ 与已知 $f(x_1)+f(x_2)=0$ 矛盾；

② 若 x_1，$x_2\in(1,+\infty)$，则 $f(x_1)>0$，$f(x_2)>0$，

则 $f(x_1)+f(x_2)>0$ 与已知 $f(x_1)+f(x_2)=0$ 矛盾；

③ 若 $x_1=1$，则 $f(x_1)=0$，又 $f(x_1)+f(x_2)=0$，$\therefore f(x_2)=0$，

$\therefore x_2=1$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾；

④ 不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

则由（Ⅱ）知当 $0<x<1$ 时，$f(1+x)+f(1-x)<0$，

令 $1-x=x_1$，则 $f(2-x_1)+f(x_1)<0$，

$\therefore f(2-x_1)<-f(x_1)=f(x_2)$，

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore 2-x_1<x_2$，$\therefore x_1+x_2>2$.

18. 已知函数 $f(x)=(x^2-6x+a)e^x$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $5x+y=0$ 平行，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a=11$ 时，若 $f(m)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(m>1)$，且 $x_1\neq x_2$，证明：$m>\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

【解答】解：（1）∵ $f'(x)=(x^2-4x+a-6)e^x$，

$\therefore f'(0)=a-6=-5$，故 $a=1$，

$\therefore f'(x)=(x+1)(x-5)e^{x}$

$f'(x)>0$ $x<-1$ $x>5$ $f'(x)<0$ $-1<x<5$

$\therefore f(x)$ $(-\infty,-1)$ $(5,+\infty)$ $(-1,5)$

(2) $f(x)=(x^{2}-6x+11)e^{x}$ $\therefore f'(x)=(x^{2}-4x+5)e^{x}$

$g(x)=(x^{2}-4x+5)e^{x}$ $g'(x)=e^{x}(x-1)^{2}\geqslant 0$

$\therefore g(x)$ R

$\dfrac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}=f'(m)$

$\therefore f'(x_1)-f'(m)=f'(m)-f'(x_2)$

$\therefore f'(x_1)-f'(m)$ $f'(m)-f'(x_2)$

$x_1<m<x_2$ $h(x)=f'(2m-x)+f'(x)-2f'(m)(x>m>1)$

$h'(x)=-e^{2m-x}(2m-x-1)^{2}+e^{x}(x-1)^{2}$

$e^{2m-x}<e^{x}$ $(2m-x-1)^{2}-(x-1)^{2}=(2m-2)(2m-2x)<0$

$\therefore h'(x)>0$ $\therefore h(x)$ $(m,+\infty)$

$\therefore h(x)>h(m)=0$ $\therefore h(x_2)=f'(2m-x_2)+f'(x_2)-2f'(m)>0$

$\therefore f'(2m-x_2)>2f'(m)-f'(x_2)=f'(x_1)$

$f'(x)$ R

$\therefore 2m-x_2>x_1$ $m>\dfrac{x_1+x_2}{2}$